AI – Calcul algébrique

I- Développer

« Pièges à éviter » :

• Ne pas oublier le double produit dans le développement d'un carré : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

• Lorsqu'on a un signe « – » devant une parenthèse, il faut changer tous les signes :

$$-(A+B-C) = -A-B+C$$

• Attention, pour développer un produit de trois facteurs, on en développe deux, puis on développe ce résultat avec le troisième facteur.

• Un signe « – » devant un trait de fraction, c'est comme un signe « – » devant une parenthèse au numérateur : $-\dfrac{N}{D} = \dfrac{-N}{D}$

Exercice résolu : Développer les expressions suivantes :

$A(x) = (2x+1)(2x+3) - (2x+1)(x-3)$

Ici, il faut faire attention au signe « – » situer devant la parenthèse. Pour éviter toute erreur, on réécrit le « – », on ouvre des parenthèses et on développe dans ces parenthèses. Ensuite il restera à distribuer ce « – » en changeant tous les signes.

$A(x) = 4x^2 + 6x + 2x + 3 - (2x^2 - 6x + x - 3)$

$A(x) = 4x^2 + 8x + 3 - (2x^2 - 5x - 3)$

$A(x) = 4x^2 + 8x + 3 - 2x^2 + 5x + 3$

$A(x) = 2x^2 + 13x + 6$

$B(x) = (x+4)^2 + 2(x-2)(x+3)$

Ici, attention au produit de trois facteurs. On ne sait développer que deux facteurs en même temps.

$B(x) = x^2 + 8x + 16 + 2(x^2 + 3x - 2x - 6)$

$B(x) = x^2 + 8x + 16 + 2x^2 + 6x - 4x - 12$

$B(x) = 3x^2 + 10x + 4$

<u>Exercice 1</u> : Développer et réduire chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (x-2)x + 3 - 5(x-1) + 3x - (2-x)$

$B(x) = x - 2(x+3) - 5x(3x-1) - (2-x)$

$C(x) = -3x(x-3) - (1-4x)(x+1) - 2x(x-1)$

$D(x) = (x-3)^2 - 4x(x-1)$

$E(x) = (-3x-1)(-x-3) - 3(4x-3)(-x-2) - (7x^2 - x)$

II- Factoriser

Les questions à se poser pour factoriser :

a- **Est-elle déjà factorisée ?** Si oui, on vérifie que la factorisation est optimale, c'est-à-dire on vérifie que chaque parenthèse est elle-même factorisée.

Exemple : Factoriser $A(x) = (5x-1)(-3x^2 - x)$

b- **Dans tous les termes de la somme, a-t-on un facteur commun ?** Si oui, souligner ce facteur commun, le mettre en facteur, puis écrire entre crochets ce qui n'est pas souligné : il doit y avoir autant de termes dans les crochets que dans la somme initiale.

Exemple : Factoriser $B(x) = (2x-1)(x+4) + (x+4)^2 - 2(x+4)(x+3)$

c- **Reconnaît-on une identité remarquable ?**

d- **Si la réponse à chaque question précédente est non, alors développer** : l'expression obtenue après développement peut être du 1er degré ou facilement factorisable.

<u>« Pièges à éviter »</u> :
- Ne pas oublier le facteur 1 dans une factorisation : $AB + A = A(B+1)$
- La somme de deux carrés ne se transforme pas en forme factorisée.

1) Un facteur commun apparaît

Méthode :

• L'expression se présente sous forme d'une somme algébrique de termes. Préciser le nombre de termes.

• Déterminer un (ou des) facteur(s) qui apparai(ssen)t dans chaque terme.

• Factoriser l'expression en se posant, pour chaque terme, la question : « par quoi dois-je multiplier le(s) facteur(s) commun(s) pour obtenir ce terme ? » Quel est le nombre de termes figurant entre parenthèses ?

• Réduire les sommes de termes figurant entre parenthèses.

Exemple : Soit l'expression : $A(x) = 4(x + 1) – 3x(x + 1) + (x + 1)(5x – 7)$

- $A(x)$ est une somme de trois termes.
- On distingue le facteur $(x + 1)$, commun aux trois termes.
- Je dois multiplier $(x + 1)$ par 4 pour obtenir $4(x + 1)$, je dois multiplier $(x + 1)$ par $–3x$ pour obtenir $–3x(x + 1)$, …
  $A(x) = (x + 1)[4 – 3x + (5x – 7)]$
  On retrouve trois termes entre les crochets.
- $A(x) = (x + 1)(4 – 3x + 5x – 7) = (x + 1)(2x – 3)$

Exercice 2 : Factoriser en suivant les mêmes instructions :

$B(x) = 12x^3 – 3x^2 + 15x$ $\qquad$ $C(x) = 3(x – 2)^2 + 4x(x – 2)$

$D(x) = 9x(2x + 1)(x – 2) + 15x^2(x – 2)(3 – x)$ $\qquad$ $E(x) = x + 3 – (2x – 1)(x + 3)$

2) On fait apparaître un facteur commun

Il arrive que le facteur commun ne figure pas explicitement dans l'expression donnée.

Exercice 3 : Faire apparaître, dans chaque cas, un facteur commun en modifiant certains termes de la somme . Factoriser ensuite selon la méthode décrite ci-dessus.

$F(x) = (4x + 1)(x – 1) – (x – 4)(1 – x) – 3x(x – 1)$ $\qquad$ $G(x) = (2x + 1)(2x – 6) + (2 – x)(x – 3)$

$H(x) = 5(3x – 1)(x + 2) + 4x(2 – 6x)$ $\qquad$ $I(x) = (x + 1)(2x – 1) + 6x^2 – 3x$

3) On utilise une identité remarquable

Exercice 4 :

a. Reconnaître, dans l'expression donnée, une identité remarquable. L'utiliser pour factoriser.

$J(x) = 4x^2 – 81$ $\qquad$ $K(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $L(x) = (3x – 1)^2 – 16$ $\qquad$ $M(x) = 9x^2 – 6\sqrt{2}x + 2$

b. Factoriser, puis reconnaître, dans l'un de facteurs, une identité remarquable. L'utiliser pour terminer la factorisation.

$N(x) = 27x^3 – 36x^2 + 12x$ $\qquad$ $O(x) = 4x^3 – x(x – 1)^2$

4) A vous de jouer

Exercice 5 : Factoriser les expressions suivantes :

$A(x) = (x – 5)(2x + 3) + (4x – 5)(5 – x)$ $\qquad$ $B(x) = 3 – x + (3 – x)^2$

$C(x) = 4x^2 – 1 – (3x + 5)(2x – 1)$ $\qquad$ $D(x) = 2(4x – 5)^2 – 5x(5 – 4x)$

$E(x) = (2x + 3)(x – 1) + (x + 1)(4 – 5x)$ $\qquad$ $F(x) = (x – 1)(2x – 3) – (1 – x)^2 + x – 1$

$G(x) = (6x – 3)(x + 1) – (2x – 1)(x + 1) + (1 – 2x)^2$

III- Pièges … et astuces …

Exercice 6 : voici quelques erreurs classiques en calcul algébrique :

Erreur 1 : $2 – \frac{3 – x}{5} = 2 + \frac{–3 – x}{5}$

Erreur 2 : $2x(5 + 4x) + (5 + 4x) = (5 + 4x)2x$

Erreur 3 : $9(x – 3)^2 = (9x – 27)^2$

1) Décrire chaque erreur, et rectifier chaque écriture pour que l'égalité soit vraie.
2) Repérer dans les exercices suivants, lequel des pièges s'y présente :
   Exercice 1 : Factoriser $(x – 1)^2 – 16(x – 5)^2$.
   Exercice 2 : Simplifier $\frac{2}{3} + \frac{x + 1}{5} – \frac{x – 2}{2}$.
   Exercice 3 : Factoriser $2(x + 1) – 5x(x + 1) + (x + 1)$.