

AI – Nombres

Les ensembles de nombres

Exercice résolu 1 : Dans chaque cas, dire si le rationnel est entier, décimal non entier ou rationnel non décimal.

$$a = \frac{7}{5} \quad b = -\frac{11}{9} \quad c = -\frac{7 \times 10^3}{10^{-4}}$$

Méthode : Le quotient $\frac{a}{b}$ de deux entiers relatifs (avec $b \neq 0$) est un rationnel. Pour en savoir plus, on effectue la division de a par b à la main :

- ☞ si la division tombe juste, x est un entier ;
- ☞ si la division tombe juste après la virgule, x est un décimal non entier ;
- ☞ si la division ne s'arrête jamais, x est un rationnel non décimal.

Solution :

$$a = \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4. \text{ Donc } a \text{ est un décimal non entier.}$$

$$b = -\frac{11}{9} = -1,222\dots \text{ (la division ne s'arrête jamais). Donc } b \text{ est un rationnel non décimal.}$$

$$c = -\frac{7 \times 10^3}{10^{-4}} = -7 \times 10^3 \times 10^4 = -7 \times 10^7 = -70\,000\,000. \text{ Donc } c \text{ est un entier relatif.}$$

Exercice résolu 2 : Dans chaque cas, dire si le réel est irrationnel ou non.

$$d = \sqrt{\frac{4}{81}} \quad e = (2\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{5} + 1) \quad f = \frac{\pi}{2} \quad g = \sqrt{28}$$

Attention : un nombre écrit sous la forme \sqrt{a} (avec $a > 0$) n'est pas nécessairement un irrationnel. Il faut simplifier son écriture (si possible) avant de décider.

Solution :

$$d = \sqrt{\frac{4}{81}} = \frac{2}{9}. \text{ Donc } d \in \mathbb{Q} \text{ et ce nombre n'est pas un irrationnel.}$$

$$e = (2\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{5} + 1) = (2\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4 \times 5 - 1 = 19. \text{ Donc } e \in \mathbb{N} \text{ et ce n'est pas un irrationnel.}$$

$$f = \frac{\pi}{2} \text{ est un irrationnel car } \pi \text{ est un irrationnel.}$$

$$g = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}. \sqrt{7} \text{ est un irrationnel donc } g \text{ est un irrationnel.}$$

Exercice résolu 3 : Donner la nature de chacun des nombres :

$$h = 0,3333 \quad i = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} \quad j = \sqrt{36 \times 10^6} \quad k = (2 - \sqrt{3})^2$$

Remarque : donner la nature d'un nombre, c'est indiquer auquel des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} et \mathbb{R} , le plus petit possible, il appartient.

Solution :

L'écriture décimale de h a un nombre fini de chiffres après la virgule, donc $h \in \mathbb{D}$.

$$i = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \text{ donc } i \in \mathbb{Q} \text{ (mais } i \text{ n'est pas un décimal).}$$

$$j = \sqrt{36 \times 10^6} = \sqrt{36} \times \sqrt{10^6} = 6 \times 10^3 = 6\,000. \text{ Donc, } j \in \mathbb{N}.$$

$$k = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} \text{ et } \sqrt{3} \text{ est un irrationnel donc, } k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1 : indiquer la nature de chacun des nombres suivants (on donnera la réponse par une appartenance à un ensemble) :

$-\frac{84}{14}$	$\frac{\pi}{3}$	1,6666...	$-\frac{25}{\sqrt{100}}$	$\frac{4,1 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}}$	$\frac{5\pi}{15\pi}$
$\frac{\pi+3}{\pi+1}$	$-\frac{140}{6}$	$\frac{240\,000}{6}$	$-\frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$	$\frac{2\sqrt{39}}{\sqrt{26}}$	$\sqrt{1-\frac{3}{5}} \times \sqrt{1+\frac{3}{5}}$

Décomposer en produit de facteurs premiers

Exercice résolu 4 :

- Décomposer chacun des deux entiers 525 et 90 en produit de facteurs premiers.
- En déduire la forme irréductible du rationnel $\frac{525}{90}$.

Solution :

- $525 = 5 \times 105 = 5 \times 5 \times 21 = 3 \times 5^2 \times 7$ et $90 = 9 \times 10 = 2 \times 3^2 \times 5$
- $\frac{525}{90} = \frac{3 \times 5^2 \times 7}{2 \times 3^2 \times 5} = \frac{5 \times 7}{2 \times 3} = \frac{35}{6}$

Exercice résolu 5 :

- On considère les deux entiers $a = 3\,240$ et $b = 1\,440$.
- Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
- En déduire une expression de \sqrt{a} et de \sqrt{b} .
- En déduire que $\sqrt{a \times b}$ est un entier et que $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est un décimal que l'on déterminera.

Solution :

- $3\,240 = 10 \times 324 = 10 \times 4 \times 81 = 2 \times 5 \times 4 \times 9 \times 9 = 2^3 \times 3^4 \times 5$
 $1\,440 = 10 \times 144 = 10 \times 4 \times 36 = 2 \times 5 \times 2^2 \times 4 \times 9 = 2^5 \times 3^2 \times 5$
- $\sqrt{3\,240} = \sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5} = 2 \times 3^2 \times \sqrt{2 \times 5} = 18\sqrt{10}$.
 $\sqrt{1\,440} = \sqrt{2^5 \times 3^2 \times 5} = 2^2 \times 3 \times \sqrt{2 \times 5} = 12\sqrt{10}$.
- $\sqrt{3\,240 \times 1\,440} = \sqrt{3\,240} \times \sqrt{1\,440} = 18\sqrt{10} \times 12\sqrt{10} = 18 \times 12 \times 10 = 2\,160$
- $\sqrt{\frac{3\,240}{1\,440}} = \frac{\sqrt{3\,240}}{\sqrt{1\,440}} = \frac{18\sqrt{10}}{12\sqrt{10}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1,5$

Exercice 2 : Dans chaque cas, décomposer en produit de facteurs premiers :

- (1) 1 200 (2) 27 × 24 (3) 26 × 38 (4) 28² × 49

Exercice 3 : Rendre irréductible chacune des fractions suivantes.

- (1) $\frac{2^3 \times 5 \times 11}{2 \times 3 \times 5^2}$ (2) $\frac{2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}{2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2}$ (3) $\frac{224}{280}$ (4) $\frac{68}{56} \times \frac{63}{51}$

Exercice 4 : Utiliser la décomposition en produit de nombres premiers pour écrire chaque nombre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels et b le plus petit possible.

- (1) $\sqrt{252}$ (2) $\sqrt{756}$ (3) $\sqrt{5\,850}$ (4) $\sqrt{16\,200}$