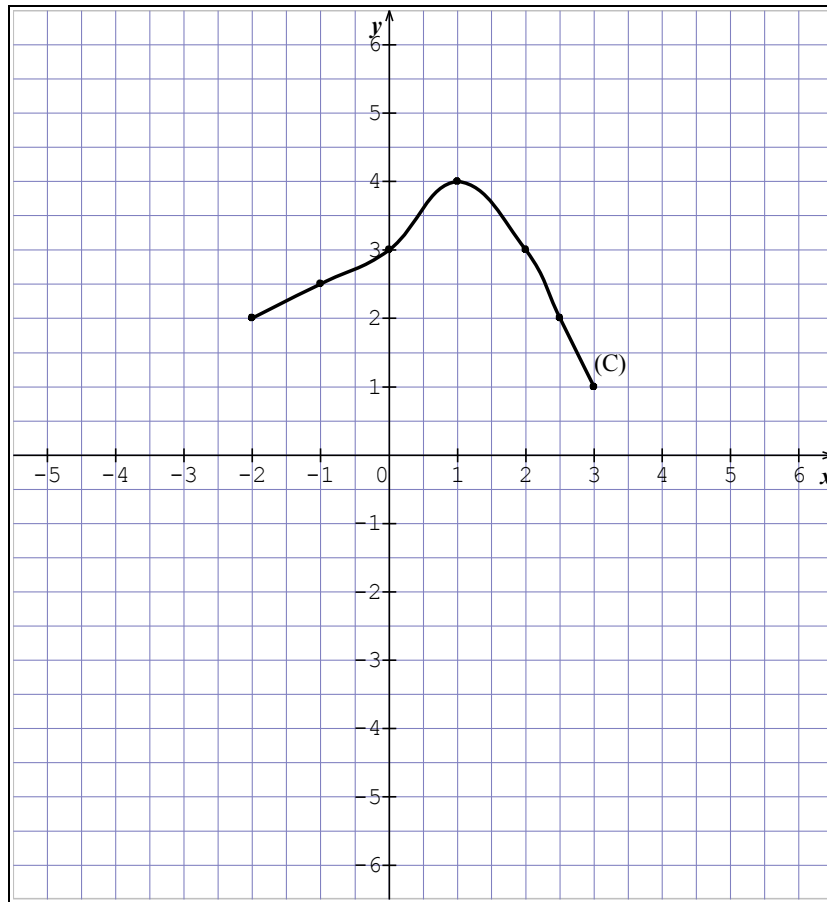


**Exercice I (1,5+1,5+1,5=4,5points)**

Voici la représentation graphique (C) d'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-2 ; 3]$



1. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur son intervalle de définition.
2. On considère la fonction  $h$  définie pour tout réel de l'intervalle  $[-4 ; 1]$  par  $h(x) = 3 - f(x + 2)$  et  $(C')$  sa courbe représentative.
3. Par quelle succession de transformations du plan passe-t-on de la courbe (C) à la courbe  $(C')$  ? Tracer en vert une esquisse de la courbe  $(C')$  sur le graphique ci-dessus (on pourra utiliser une fonction auxiliaire  $g$  et sa courbe  $(C_g)$ ).
4. Retrouver, par la démonstration, le sens de variation de  $h$  sur l'intervalle  $[-1 ; 1]$ .

**Exercice II (1,5+2+2+0,5=6points)**

On considère les fonctions  $h$  et  $k$  définies par  $h(x) = \sqrt{x}$  et  $k(x) = x^2 - 4$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition et le sens de variation des fonctions  $h$  et  $k$ .
2. En déduire l'ensemble de définition de  $k \circ h$  puis son sens de variation.
3. Même question pour  $h \circ k$  sur  $]-\infty; -2]$ .
4. Peut-on dire que  $k \circ h$  est une fonction affine ? justifier.

**Problème (0,5+1+1,5+1,5+3+1+1=9,5points)**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 3}$  et  $(C_g)$  sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$  de la fonction  $g$ .
2. La fonction  $g$  est-elle paire ? Est-elle impaire ? Quelle conséquence en déduire pour la courbe  $(C_g)$  ?
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $g(x) \leq 4$ . Peut-on en déduire que 4 est le maximum de la fonction  $g$  ? Justifier.
4. Démontrer que, pour tout  $x \in D_g$ ,  $g(x) = 4 - \frac{7}{x^2 + 3}$  puis écrire  $g$  comme composée de trois fonctions  $u, v, w$ .
5. En utilisant la décomposition obtenue au 4., étudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$  et en déduire le tableau de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
6. Tracer la courbe  $(C_g)$  dans un repère orthonormal.

**Exercice I**

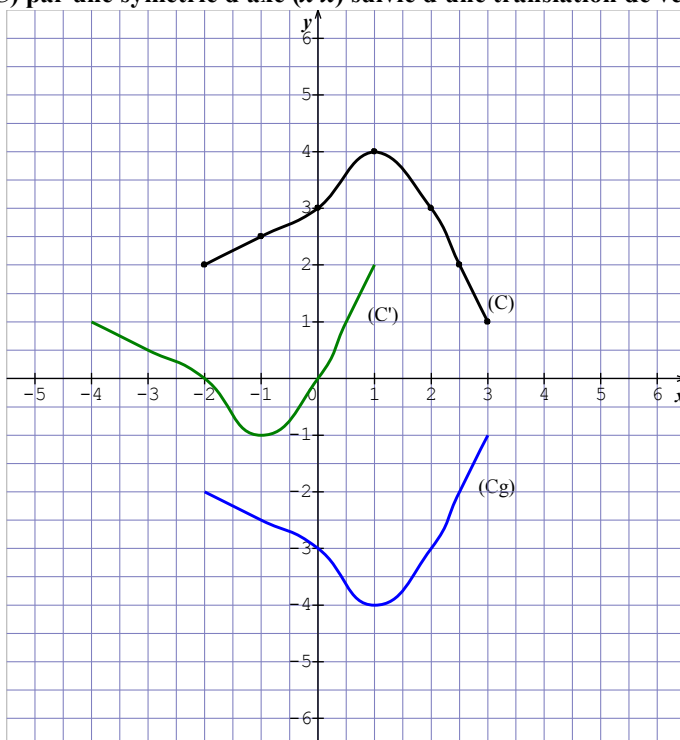
1. Par lecture graphique, on peut dresser le **tableau de variation** suivant :

$x$	-2	1	3
$f(x)$	2	4	1

2. Posons  $g(x) = -f(x)$ . On a alors  $h(x) = g(x+2) + 3 = g(x-a) + b$  avec  $a = -2$  et  $b = 3$   
d'où  $(C_g)$  se déduit de  $(C)$  par symétrie par rapport à l'axe des abscisses

et  $(C')$  se déduit de  $(C_g)$  par translation de vecteur  $-2\vec{i} + 3\vec{j}$ .

**Donc  $(C')$  se déduit de  $(C)$  par une symétrie d'axe  $(x'x)$  suivie d'une translation de vecteur  $-2\vec{i} + 3\vec{j}$**



3. Soient deux réels  $a$  et  $b$  de  $[-1 ; 1]$ . Posons  $a < b$ .

$h(a) - h(b) = 3 - f(a+2) - 3 + f(b+2) = -[f(a+2) - f(b+2)]$  or  $-1 \leq a < b \leq 1 \Rightarrow 1 \leq a+2 < b+2 \leq 3$   
et  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[1 ; 3]$  donc  $f(a+2) - f(b+2) > 0 \Rightarrow h(a) - h(b) > 0 \Rightarrow h(a) > h(b)$ .

Par conséquent,  **$h$  est strictement décroissante sur  $[-1 ; 1]$**

**Exercice II**

1.  $h$  est la fonction racine carrée donc  $D_h = \mathbb{R}^+$  et  $h$  est strictement croissante sur son ensemble de définition.

$k$  est associée à la fonction carré  $c$  par la formule  $k(x) = c(x) - 4$  donc  $D_k = \mathbb{R}$  et elle a même sens de variation que  $c$ . Elle est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

2.  $x \in D_{k \circ h} \Leftrightarrow x \in D_h$  et  $h(x) \in D_k \Leftrightarrow x \geq 0$  et  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$  donc  $D_{k \circ h} = \mathbb{R}^+$

$h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $h(x) = \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$  et  $k$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc, par théorème,  $k \circ h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

- 3.

$$x \in D_{h \circ k} \Leftrightarrow x \in D_k \text{ et } k(x) \in D_h$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 - 4 \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{or } x^2 - 4 = (x+2)(x-2).$$

D'après le tableau de signe ci-contre, on en déduit :

$$x \in D_{h \circ k} \Leftrightarrow x \in ]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$$

$$\text{donc } D_{h \circ k} = ]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x+2$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	+	+
$x^2-4$	+	-	+	+

$k$  est strictement décroissante sur  $]-\infty ; -2]$  et, pour tout  $x \in ]-\infty ; -2]$ ,  $k(x) = x^2 - 4 \in \mathbb{R}^+$  et  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  donc, par théorème,  $h \circ k$  est strictement décroissante sur  $]-\infty ; -2]$ .

4.  $k \circ h$  n'est pas une fonction affine car son ensemble de définition n'est pas  $\mathbb{R}$

**Problème**

- $g(x)$  existe  $\Leftrightarrow x^2 + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -3$  ce qui est toujours vrai donc  $D_g = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$  est centré en 0 et  $g(-x) = \frac{4(-x)^2 + 5}{(-x)^2 + 3} = \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 3} = g(x)$  donc  $g$  est paire. Sa courbe représentative ( $C_g$ ) est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3.  $g(x) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 3} \leq 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 5 \leq 4(x^2 + 3)$  car  $x^2 + 3 > 0$   
 $\Leftrightarrow 4x^2 + 5 - 4x^2 - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -7 \leq 0$  or, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-7 < 0$  d'où  $S = \mathbb{R}$   
 Pour tout réel  $x$ , d'après ce qui précède,  $g(x) < 4$  donc 4 est un majorant mais pas un maximum de la fonction  $g$ .

- Pour tout  $x \in D_g$ ,  $4 - \frac{7}{x^2 + 3} = \frac{4x^2 + 12 - 7}{x^2 + 3} = \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 3} = g(x)$

Posons  $u(x) = x^2 + 3$ ;  $v(x) = \frac{1}{x}$  et  $w(x) = 4 - 7x$  alors

$$w \circ v \circ u(x) = w \circ v(x^2 + 3) = w\left(\frac{1}{x^2 + 3}\right) = 4 - \frac{7}{x^2 + 3} \text{ donc } g = w \circ v \circ u.$$

5.  $u$  est une fonction associée à la fonction carré  $c$  par  $u(x) = c(x) + 3$  donc elle est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $u(x) = x^2 + 3 \in ]3; +\infty[$

$v$  est la fonction inverse donc elle est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$  donc sur  $]3; +\infty[$

pour tout  $x \in ]3; +\infty[$ ,  $v(x) = \frac{1}{x} \in ]-\infty; \frac{1}{3}[$

$w$  est une fonction affine de coefficient directeur  $-7 < 0$  donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $]-\infty; \frac{1}{3}[$

donc, d'après théorème,  $w \circ v \circ u$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$

La fonction  $g$  étant paire, on peut en déduire son tableau de variation sur  $\mathbb{R}$  par symétrie. De plus,  $g(0) = \frac{5}{3}$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$	↘	$\frac{5}{3}$	↗

- Courbe ( $C_g$ ) dans un repère orthonormal.

