Exercice corrigé : Etudier et représenter la fonction f définie par $f\ (x) = 1 - x - x^2$

Ensemble de définition :

La fonction f est une fonction trinôme du second degré donc $D_f = \mathbb{R}$

Sens de variation :

Le coefficient de x^2 est -1. Il est strictement négatif donc f est d'abord croissante puis décroissante.

Son maximum est atteint en $-\frac{b}{2\ a} = -\frac{1}{2}$ et est égal à $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

D'où le tableau de variations suivant

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	

Représentation graphique :

Le sommet S a pour coordonnées ($-\frac{1}{2}$; $\frac{5}{4}$)

Points d'intersection avec les axes :

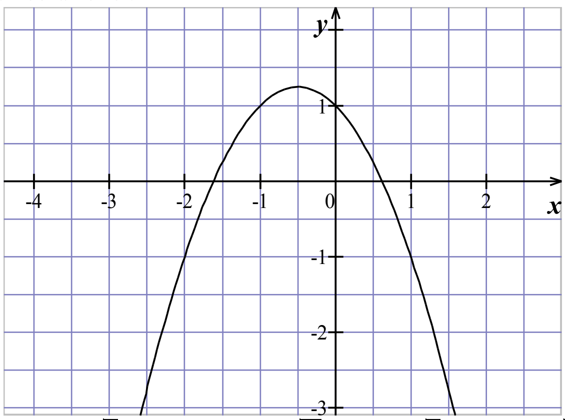
Pour $x = 0$, $f\ (x) = f\ (0) = 1$ donc la parabole représentant f coupe l'axe des ordonnées au point J de coordonnées (0;1)

$f\ (x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x - x^2 = 0$

C'est une équation du second degré avec $a = -1,\ b = -1\ \ et\ \ c = 1$.

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4\ a\ c = (-1)^2 - 4\ (-1) \times 1 = 1 + 4 = 5$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :



$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\ a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\ a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

donc la parabole représentant la fonction f coupe l'axe des abscisses aux points J_1 et J_2 de coordonnées respectives $\left(0\ ;\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(0\ ;\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$

Signe de la fonction :

Le trinôme du second degré définissant f est du signe de a donc négatif à l'extérieur des racines déterminées ci-dessus et du signe contraire entre celles-ci.

On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	