

QCM (2 points)

Entourer la bonne réponse (attention : +0,5 par bonne réponse, -0,125 par réponse fausse, total ramené à 0 en cas de bilan négatif).

Le discriminant du trinôme $x^2 - 5$ est	25	29	20
L'ensemble des solutions de l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ est	$\{6 - 3\sqrt{3}; 6 + 3\sqrt{3}\}$	\emptyset	$\{3\}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x^2 + 1 > 0$ est	$]0; +\infty[$	$]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$	\mathbb{R}
L'équation $(m-2)x^2 + 3x + m + 2 = 0$ a une seule solution si et seulement si	$m = \frac{5}{2}$	$m = 2$	$m = \frac{-5}{2}$ ou $m = 2$ ou $m = \frac{5}{2}$

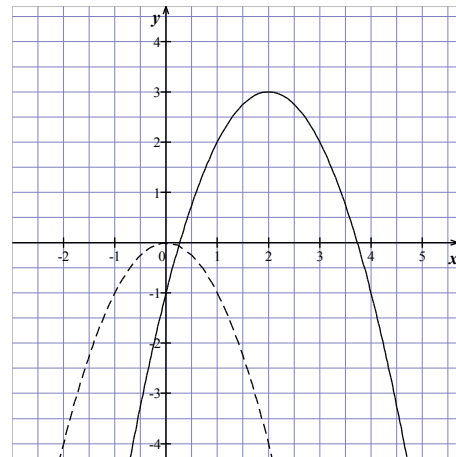
Exercice I (3 points)

Déterminer le signe des trinômes suivants :

$$A(x) = 4x^2 + 8x + 3 \quad ; \quad B(x) = x^2 - 12x + 36 \quad ; \quad C(x) = -x^2 + 6x - 10$$

Exercice II (1+1+1=3 points)

- Mettre sous forme canonique le trinôme du second degré $T(x) = -x^2 + 4x - 1$
 - En déduire le maximum de la fonction T .
- Déterminer graphiquement l'équation de la parabole ci-contre (en pointillé, on a tracé la parabole d'équation $y = -x^2$).

**Exercice III (1,5+2,5=4 points)**

Soit le polynôme $P(x) = -x^3 + 7x + 6$.

- Démontrer que -1 est une racine de $P(x)$ puis en déduire le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$
- Après avoir déterminé le signe de $Q(x)$, dresser le tableau de signe de $P(x)$ puis résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Problème (2+1+0,5+0,5+1+1+2=8 points)

Considérons la famille de fonctions f_m définies par $f_m(x) = (m-1)x^2 - 4mx + 4m + 1$ avec $m \in \mathbb{R}$. On appellera C_m leur représentation graphique.

Partie A

Dans toute cette partie, on se propose d'étudier f_{-2} définie par $f_{-2}(x) = -3x^2 + 8x - 7$.

- Donner son ensemble de définition, son sens de variation puis dresser son tableau de variation.
- Déterminer les points d'intersection avec les axes et construire sa représentation graphique.

Partie B

Dans cette partie, on va étudier cette famille de fonctions.

- Pour quelle(s) valeur(s) de m , f_m est-elle une fonction affine ?
- On suppose désormais que f_m est une fonction polynôme du second degré.
 - Pour quelle(s) valeur(s) de m , C_m a-t-elle son sommet S sur l'axe des ordonnées ?
 - Exprimer le discriminant de $f_m(x)$ en fonction de m .
 - Pour quelle(s) valeur(s) de m , 0 a-t-il un seul antécédent par f_m ? En déduire pour quelle(s) valeur(s) de m , S est sur l'axe des abscisses.
- Démontrer que toutes les courbes C_m passent par un même point A ($\alpha; \beta$) dont on déterminera les coordonnées.

QCM

Le discriminant du trinôme $x^2 - 5$ est 20

L'ensemble des solutions de l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ est $\{3\}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x^2 + 1 > 0$ est \mathbb{R}

$$(m-2)x^2 + 3x + m + 2 = 0 \text{ a une seule solution} \Leftrightarrow m-2=0 \text{ ou } 9-4(m^2-4)=0 \Leftrightarrow m=2 \text{ ou } m=\pm\frac{5}{2}$$

Exercice I

Le trinôme du second degré $A(x) = 4x^2 + 8x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 12 = 16 > 0$

il a donc deux racines distinctes $x_1 = \frac{-8-4}{8} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-8+4}{8} = -\frac{1}{2}$

il est du signe de $a = 4 > 0$ partout sauf entre les racines

On peut donc dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-3/2$	$-1/2$	$+\infty$	
$A(x)$	+	0	-	0	+

$B(x) = x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$ donc il est positif pour tout $x \neq 6$ et nul pour $x = 6$

D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

$C(x) = -x^2 + 6x - 10$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 4 \times 10 = -4 < 0$

il est donc du signe de $a = -1 < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

Exercice II

1.
a) $T(x) = -x^2 + 4x - 1 = -(x^2 - 4x + 1) = -[(x-2)^2 - 4 + 1] = -[(x-2)^2 - 3]$
b)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow -[(x-2)^2 - 3] \leq 3$

de plus, $T(2) = 3$ donc la fonction T admet 3 comme maximum et elle l'atteint en 2

2. Cette parabole se déduit de la parabole représentée en pointillé par une translation de vecteur $2\vec{i} + 3\vec{j}$. C'est donc la représentation graphique de la fonction T .

Exercice III

1. Pour $P(x) = -x^3 + 7x + 6$, $P(-1) = 1 - 7 + 6 = 0$ donc -1 est une racine de P
donc il existe un polynôme Q de degré $3-1=2$ tel que $P(x) = (x+1)Q(x)$. Soient a, b, c ses coefficients.

$$P(x) = (x+1)Q(x) \Leftrightarrow \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, -x^3 + 7x + 6 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

$$\Leftrightarrow \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, -x^3 + 7x + 6 = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b + a = 0 \\ c + b = 7 \\ c = 6 \end{cases} \text{ par identification}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 6 \\ c = 6 \end{cases}$$

On a donc $P(x) = (x+1)(-x^2 + x + 6)$

2. Pour Q , le discriminant est $\Delta = 1 + 4 \times 6 = 1 + 24 = 25 > 0$

il y a donc deux racines $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{-2} = \frac{-1 - 5}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{-1 + 5}{-2} = -2$ et donc $Q(x)$ est du signe de $a = -1 < 0$ partout

sauf entre les racines. On peut donc dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$			
$x+1$		-	-	0	+	+		
$Q(x)$		-	0	+	+	0	-	
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-

L'ensemble des solutions est donc $S =]-\infty; -2] \cup [-1; 3]$

Problème

Partie A

1. Etude de f_{-2} définie par $f_{-2}(x) = -3x^2 + 8x - 7$:

Ensemble de définition : $D_{f_{-2}} = \mathbb{R}$ car f_{-2} est une fonction polynôme.

Sens de variation : Le coefficient de x^2 est $-3 < 0$ donc f_{-2} est d'abord croissante puis décroissante. Son maximum est

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} \text{ et est égal à } f_{-2}\left(\frac{4}{3}\right) = -3\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{8 \times 4}{3} - 7 = \frac{-16}{3} + \frac{32}{3} - \frac{21}{3} = \frac{-5}{3}$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f_{-2}(x)$			

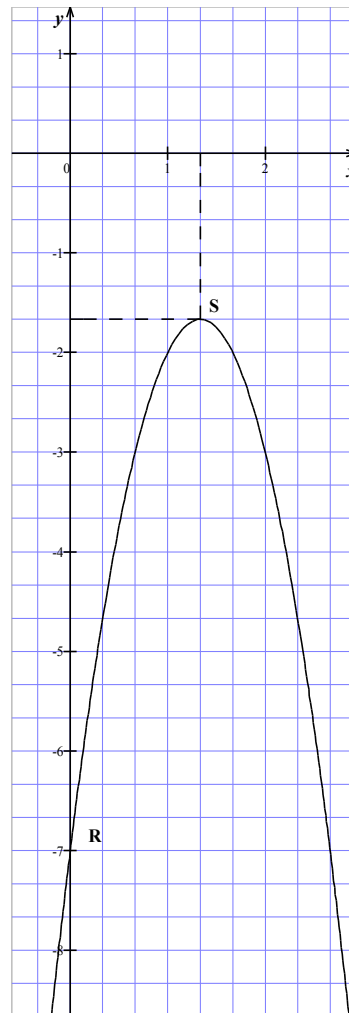
2. $f_{-2}(0) = -7$ donc $R(0; -7)$ est le point d'intersection avec $(y' y)$

$$f_{-2}(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 8x - 7 = 0$$

Pour ce trinôme,

$$\Delta = 64 - 4 \times 21 = 64 - 84 = -20 < 0$$

donc il n'y a aucun point d'intersection avec $(x' x)$.



Partie B

1. f_m est affine $\Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

2.

a) Le sommet S de la parabole a pour abscisse $\frac{-b}{2a} = \frac{4m}{2(m-1)}$ donc

$$S \in (y' y) \Leftrightarrow \frac{4m}{2(m-1)} = 0 \Leftrightarrow 4m = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

b) Pour $f_m(x)$,

$$\Delta = (-4m)^2 - 4(m-1)(4m+1) = 16m^2 - 4(4m^2 + m - 4m - 1) = 16m^2 - 16m^2 + 12m + 4 = 4(3m + 1)$$

c)

0 a un antécédent unique $\Leftrightarrow f_m(x) = 0$ a une solution double $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow 4(3m + 1) = 0 \Leftrightarrow 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow 3m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$$

Le sommet S est sur $(x' x)$ si et seulement si c'est le seul point d'intersection avec l'axe des abscisses autrement dit si et seulement si $m = -\frac{1}{3}$

d)

$$A(\alpha; \beta) \in C_m \text{ pour tout } m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \beta = (m-1)\alpha^2 - 4m\alpha + 4m + 1 \text{ pour tout } m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \beta = m\alpha^2 - \alpha^2 - 4m\alpha + 4m + 1 \text{ pour tout } m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \beta = m(\alpha^2 - 4\alpha + 4) - \alpha^2 + 1 \text{ pour tout } m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - 4\alpha + 4)m - \alpha^2 - \beta + 1 = 0 \text{ pour tout } m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \\ -\alpha^2 - \beta + 1 = 0 \end{cases} \text{ par identification}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - 2)^2 = 0 \\ \beta = -\alpha^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -4 + 1 = -3 \end{cases}$$

donc toutes les courbes C_m passent par le point $A(2; -3)$.