733	DM05-Exponentielles de base a et Suites	avril 2008

Dans une entreprise industrielle, on traite des déchets, avant leur rejet, par addition continue d'un liquide approprié, pendant un certain nombre de jours. À chaque cycle de traitement, une même quantité de déchets est prise en charge.

Pour éviter le sur stockage, avant chaque cycle, le stock de liquide de traitement (**"stock initial"**) est toujours le même, légèrement supérieur à la quantité nécessaire.

Une étude a permis de constater que, pendant la durée du cycle, le stock $s(t)$ de liquide de traitement (en litres) s'exprime, en fonction du temps t (en jours), par :
$s(t) = 10\ 400 \times (0{,}878)^t - 405$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1°) a. Calculer $s(0)$. Résoudre l'équation $s(t) = 0$. En déduire le temps a au bout duquel le stock sera théoriquement nul (**"rupture de stock"**).

(On donnera la valeur exacte de a ; on constatera qu'elle est légèrement inférieure à 25.)

b. Étudier le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ a\ ]$.

c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ a\ ]$.

(Unités : 1 cm pour 2 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 000 L sur l'axe des ordonnées.)

d. Par lecture sur le graphique, déterminer le jour au début duquel le stock n'atteind plus que la moitié du stock initial. Laisser les tracés apparents.

2°) On examine l'évolution de la consommation journalière de liquide de traitement durant le cycle.
Pour cela, on considère la suite (u_n), définie pour tout nombre entier naturel non nul, n par :

$$u_n = s(n-1) - s(n)$$

(Le nombre u_n représente la consommation de liquide de traitement, en litres, pendant le n-ième jour du cycle.)

a. Vérifier que :

$$u_1 = s(0) - s(1) = 1\ 268{,}8\ .$$

Calculer la valeur exacte de u_2.

b. Montrer alors que u_n peut s'écrire :

$$u_n = 1\ 268{,}8 \times (0{,}878)^{n-1}\ .$$

c. Prouver que la suite (u_n) est une suite géométrique . Donner la valeur exacte de sa raison q. Utiliser ces résultats pour comparer les consommations de deux jours consécutifs du cycle.

d. Dans la pratique, le cycle de traitement est arrêté à la fin du jour au cours duquel la consommation journalière de liquide de traitement devient inférieue à 70 L.

Déterminer ce jour en utilisant l'expression de u_n obtenue à la question b.

733	DM06-Exponentielles de base a et Statistiques	avril 2008

Un promoteur a construit en 1980 une résidence formée de plusieurs petites maisons de vacances dont le prix de vente, cette année-là, était de 170 000F par maison. En 1985 le prix de revente était de 240 000 F, en 1992 de 320 000 F, en 2000 de 60 980 € et en 2003 de 69 000 €.

(Rappel : 1 € = 6,559 57 F.)

1. On note $X_i = x_i - 1979$, où x_i désigne l'année. Donner le tableau des valeurs X_i et y_i, où y_i est le prix de vente d'une maison en euros l'année correspondante. (valeurs arrondies à l'euro si nécessaire).

2. Déterminer, à la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés, donnée sous la forme $y = aX + b$, a et b étant arrondis au centième ; le détail des calculs n'est pas demandé.
En déduire, par le calcul, une valeur approchée, à l'euro près, du prix de revente en 2005.

3. Soit t % le taux annuel moyen d'augmentation du prix de vente entre les années 1980 et 1985. Exprimer le prix de revente en francs de la maison en 1985 en fonction de t.
En déduire que t est égal à $100\left(e^{\frac{1}{5}\ln\left(\frac{24}{17}\right)} - 1\right)$.

4. On admet qu'une valeur aprochée de t obtenue à partir de la question précédente est 7,14.
Si l'on suppose que le taux moyen annuel d'augmentation est de 7,14% à partir de 1985, calculer, en euros, le prix de revente en 2005.
Comparer avec le résultat trouvé à la question 2. Que pouvez-vous en déduire ?