1°) a. $s(t) = 10\ 400 \times (0{,}878)^t - 405$ donc $s(0) = 10\ 400 \times (0{,}878)^0 - 405 = 10\ 400 - 405 = 9\ 995$

et, dans $\mathbb{R}^+$, $s(t) = 0 \Leftrightarrow 10\ 400 \times (0{,}878)^t - 405 = 0 \Leftrightarrow (0{,}878)^t = \dfrac{405}{10\ 400}$

$\Leftrightarrow t \ln(0{,}878) = \ln\left(\dfrac{405}{10\ 400}\right) \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(405) - \ln(10\ 400)}{\ln(0{,}878)}$

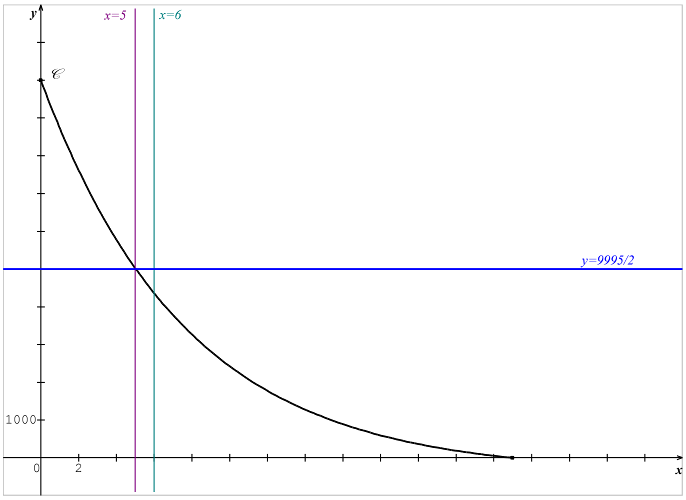
Donc, dans $\mathbb{R}^+$, la solution est : $a = \dfrac{\ln(405) - \ln(10\ 400)}{\ln(0{,}878)}$

D'après la calculatrice, a est environ égal à 24,95 soit légèrement inférieur à 25.
On en déduit que le stock sera théoriquement nul au bout de 25 jours.

b. s est une fonction associée à une fonction puissance de base 0,878
donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; a]$ et $s'(t) = 10\ 400 \ln(0{,}878) \times (0{,}878)^t$
Or $0{,}878 < 1$ donc $\ln(0{,}878) < 0$ d'où, pour tout $t \in [0 ; a]$, $s'(t) < 0$
On en déduit que s est strictement décroissante sur $[0 ; a]$ de 9 995 à 0.

N.B. On pouvait aussi utiliser le sens de variation des fonctions composées en regardant s comme une fonction puissance décroissante (0,878<1) suivie d'une fonction affine croissante (10400>0)

c.



d. D'après la lecture graphique, le stock passe en dessous de la moitié du stock initial au cours du 6ème jour.

N.B. Pour confirmer la lecture graphique qui était délicate, on pouvait contrôler à la machine :

$s(5) \approx 5021$ et $s(6) \approx 4359$

ce qui confirmait que la droite d'équation $y = \dfrac{9995}{2}$ coupait la courbe $\mathscr{C}$ légèrement à droite du point d'abscisse 5...

2°) a. $u_n = s(n-1) - s(n)$
donc :
$u_1 = s(1-1) - s(1) = s(0) - s(1) = 9\ 995 - (10\ 400 \times 0{,}878 - 405) = 9\ 995 - 8\ 726{,}20 = 1\ 268{,}80$
et :
$u_2 = s(2-1) - s(1) = s(1) - s(2) = 8\ 726{,}20 - (10\ 400 \times (0{,}878)^2 - 405) = 8\ 726{,}20 - 7\ 612{,}193\ 6 = 1\ 114{,}006\ 4$

b.
$u_n = s(n-1) - s(n) = 10\ 400 \times (0{,}878)^{n-1} - 405 - 10\ 400 \times (0{,}878)^n + 405 = 10\ 400 \times ((0{,}878)^{n-1} - (0{,}878)^n)$
$u_n = 10\ 400 \times (0{,}878)^{n-1}(1 - 0{,}878) = 1\ 268{,}8 \times (0{,}878)^{n-1}$

c. u_n est de la forme $u_1 \times q^{n-1}$ avec $u_1 = 1\ 268{,}80$ et $q = 0{,}878$ dpnc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1\ 268{,}80$ et de raison $q = 0{,}878$.

Or $0{,}878 = 1 - 0{,}122 = 1 - \dfrac{12{,}2}{100}$ donc on peut dire que la consommation journalière de liquide de traitement diminue de 12,2% entre deux jours consécutifs.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n \leqslant 70 \Leftrightarrow 1\ 268{,}80 \times (0{,}878)^{n-1} \leqslant 70$

$\Leftrightarrow (0{,}878)^{n-1} \leqslant \dfrac{70}{1\ 268{,}80}$

$\Leftrightarrow \ln((0{,}878)^{n-1}) \leqslant \ln\left(\dfrac{70}{1\ 268{,}80}\right)$

$\Leftrightarrow (n-1)\ln(0{,}878) \leqslant \ln(70) - \ln(1\ 268{,}80)$

$\Leftrightarrow n - 1 \geqslant \dfrac{\ln(70) - \ln(1\ 268{,}80)}{\ln(0{,}878)}$ (car ln(0,878)<0)

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(70) - \ln(1\ 268{,}80)}{\ln(0{,}878)} + 1$

D'après la calculatrice, $\dfrac{\ln(70) - \ln(1\ 268{,}80)}{\ln(0{,}878)} + 1$ est environ égal à 23,27.

Le plus petit entier supérieur à $\dfrac{\ln(70) - \ln(1\ 268{,}80)}{\ln(0{,}878)} + 1$ est 24.

On en déduit donc que le cycle de traitement sera arrêté à la fin du 24ème jour.