N°104 p305 *Les parties écrites en italique peuvent ne pas être écrites en contrôle.*

Méthode 1

1. *I est le milieu de [AB] donc [DI] est la médiane issue de D du triangle ABD.*

$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ *donc $E \in (DI)$ et $DE = \frac{2}{3} DI$*

donc, dans le triangle ABD, le point E est au deuxième tiers de la médiane [DI] en partant du sommet D donc E est le centre de gravité du triangle ABD.

2. O est le centre du parallélogramme ABCD donc O est le milieu de [BD]
donc [AO] est la médiane issue de A du triangle ABD.
E est le centre de gravité du triangle ABD donc $E \in [AO]$.
donc A, E et O sont alignés.
Or O est aussi le milieu de [AC] donc A, O et C sont aussi alignés.
Donc A, E et C sont alignés.

Méthode 2

3. *D'après la relation de Chasles,* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$

or $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

d'où*, d'après la relation de Chasles,* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})$

et, comme I est le milieu de [AB], $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

4. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme.

Donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
donc A, E et C sont alignés.

Méthode 3

ABCD est un parallélogramme donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires

donc $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan.

Dans ce repère, A est l'origine donc A a pour coordonnées (0;0)
$\overrightarrow{AB}$ est le 1er vecteur de base donc ses coordonnées sont (1;0) et celles de B sont (1;0) *aussi.*
$\overrightarrow{AD}$ est le 2nd vecteur de base donc ses coordonnées sont (0:1) et celles de D sont (0;1) *aussi.*

Soient $(x\ ;\ y)$ les coordonnées de E dans ce repère.

D $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et E $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}$ $\begin{cases}x\\ y - 1\end{cases}$

A $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et B $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ donc le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\begin{cases}\dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{0+0}{2} = 0\end{cases}$

D $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et I $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DI}$ $\begin{cases}\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\\ 0 - 1 = -1\end{cases}$

or $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ donc $\begin{cases}x = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\\ y - 1 = \frac{2}{3}\times(-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{1}{3}\\ y = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}\end{cases}$ donc E $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$

et A origine du repère donc $\overrightarrow{AE}$ $\begin{cases}X = \frac{1}{3}\\ Y = \frac{1}{3}\end{cases}$

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AC}$ $\begin{cases}X' = 1\\ Y' = 1\end{cases}$

De plus, $X\ Y' - X'\ Y = \frac{1}{3}\times 1 - \frac{1\times 1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
donc les points A, E et C sont alignés.