

I. Définitions

1°) Produit scalaire

Définition : Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs . Le **produit scalaire** des vecteurs \vec{u} et \vec{v} noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$ où $\vec{u} = \overline{AB}$, $\vec{v} = \overline{AC}$ et H projeté orthogonal de C sur (AB)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$ avec $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$ dans un repère orthonormal

Conséquences :

$\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ est positif $\Leftrightarrow \widehat{BAC}$ est aigu

$\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ est négatif $\Leftrightarrow \widehat{BAC}$ est obtus

Le produit scalaire est un nombre réel

EX : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un réel

Attention!
ALORS QUE

le produit d'un réel par un vecteur est un vecteur

EX : $3 \times \vec{u}$ est un vecteur

2°) Vecteurs colinéaires

Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Démo :

Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraires, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Démo :

3°) Vecteur normal

On dit que le vecteur non nul \vec{n} est **normal** à la droite (D) si sa direction est orthogonale à celle de (D)

Remarque : il existe une infinité de vecteurs normaux à une droite (D)

II. Propriétés

1°) Opérations

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et tout réel k , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(k \times \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k \times \vec{v})$$

2°) Carré

On appelle **carré scalaire** du vecteur \vec{u} le réel $\vec{u} \cdot \vec{u}$, noté \vec{u}^2 .

Conséquence : $\vec{u}^2 = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$ cohérent avec $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3°) Vecteurs orthogonaux

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$ ou \vec{u} et \vec{v} ont des directions orthogonales

On dit alors que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux**